ZBIRKA IZPITNIH NALOG IZ OPTIMIZACIJSKIH PROBLEMOV

e-učno gradivo

Danilo Korže

Univerza v Mariboru, Fakulteta za elektrotehniko, računalništvo in informatiko
Inštitut za računalništvo

AVGUST 2012

PREDGOVOR

Zbirka prinaša zbrane izpitne naloge pri predmetih Operacijske raziskave in Optimizacijske metode, ki so jih oziroma jih še poslušajo študenti študijskih programov Računalništvo in informatika ter Računalniška informacijska tehnologija (2. bolonjska stopnja).
Vse naloge so namenjene za reševanje bodisi s pomočjo programskega paketa MATLAB (in instaliran podpaket Optimization toolbox), bodisi s katerim od drugih matematičnih paketov za reševanje optimizacijskih problemov.
Pri večini nalog so enačbe za reševanje že podane, pri uporabnih nalogah pa mora študent iz besedila najprej zapisati ustrezen nabor enačb, ki ustreza problemu in ga nato rešiti.
V nalogah so pokrita naslednja področja operacijskih raziskav in optimizacijskih problemov: optimizacija funkcij brez omejitev (iskanje minimumov in maksimumov), optimizacija funkcij z dodatnimi omejitvami (spet minimumi in maksimumi), reševanje sistemov nelinearnih enačb, linearno programiranje, celoštevično linearno programiranje, problem nahrbtnika, transportni problemi, problemi najkrajše poti.
Zahtevnejše so naloge, kjer mora študent enačbe iz tekstovnega besedila kreirati sam.
Zbirka izpitnih nalog je izdana v elektronski obliki v formatu PDF.
Študentom želim dosti uspeha pri njihovem reševanju.

Danilo Korže

Operacijske raziskave

Izpit, 23. maj 2008

Pri vsaki nalogi poleg rezultatov še napiši, s katero funkcijo v MATLAB-u si prišel do rešitve in kakšni so bili vhodni parametri pri njenem klicu!

1.) Minimiziraj funkcijo:

$$f(\underline{x}) = (x_1 - 0.5)^2 (x_1 + 1)^2 + (x_2 + 1)^2 (x_2 - 1)^2 .$$

Ali ima funkcija samo en lokalni minimum oziroma maksimum? Če jih ima morda več, jih poišči! Kolikšna je vrednost funkcije v točki minimuma. Pomagaš si lahko z risanjem funkcije.

2.) Maksimiziraj funkcijo in izračunaj njeno vrednost v točki maksimuma:

$$f(\underline{x}) = (x_1^2 + 2x_2^2) e^{-(x_1^2 + x_2^2)} .$$

3.) Določi minimum funkcije in njeno vrednost v točki minimuma:

$$f(\underline{x}) = (x_1 - 2)^2 + (x_2 - 1)^2$$ ob naslednjih omejitvah

$$-x_1 - x_2 + 2 \geq 0$$
$$-x_1^2 + x_2 \geq 0$$

4.) Poišči vse ničle enačbe:

$$f(x) = x^5 - 6x^4 - 92x^3 + 402x^2 + 91x - 396$$

5.) Letalska družba kupuje gorivo za letala pri treh različnih prodajalcih. Družba potrebuje v naslednjem mesecu na vsakem od treh letališč, kjer pristaja, naslednje količine goriva: 100000 litrov na letališču 1, 180000 litrov na letališču 2 ter 350000 litrov na letališču 3. Gorivo prodajajo trije prodajalci, njihovo ceno goriva na posameznem letališču podaja naslednja tabela (cene so v centih na liter):

	Letališče 1	Letališče 2	Letališče 3
Prodajalec 1	92	89	90
Prodajalec 2	91	91	95
Prodajalec 3	87	90	92

Vsak prodajalec pa ima na voljo omejene količine goriva, ki ga skupno lahko dostavi v posameznem mesecu. Te količine so 320000 litrov prvi prodajalec, 270000 litrov drugi ter 190000 litrov tretji prodajalec. Določi pravilo za nakup goriva letalske družbe, ki bo zadovoljilo njihovim potrebam na vsakem od letališč ter bo ekonomsko čimbolj ugodno.

Operacijske raziskave

Izpit, 11. junij 2008

Pri vsaki nalogi poleg rezultatov še napiši, s katero funkcijo v MATLAB-u si prišel do rešitve in kakšni so bili vhodni parametri pri njenem klicu!

1.) Poišči vse lokalne ekstreme funkcije na intervalu [-3, 3] in njene vrednosti v teh točkah:

$$f(x) = \frac{1}{2}(\sin(5x) - x)^2 .$$

2.) Reši naslednji sistem enačb:

$$\sin(x+y) = 0$$
$$\cos(x-y) = 0$$

3.) Določi minimum funkcije in njeno vrednost v točki minimuma:

$$f(\underline{x}) = x_1^2 + 5x_2^2 + 10x_3^2 - 4x_1x_2 + 6x_1x_3 - 12x_2x_3 - 2x_1 + 10x_2 - 5x_3$$ ob naslednjih omejitvah

$$x_1 + 2x_2 + x_3 \geq 4 \text{ ter}$$

vse spremenljivke morajo biti nenegativne.

4.) Poišči minimum funkcije in njeno funkcijsko vrednost v točki minimuma:

$$f(\underline{x}) = 2x_1^2 - x_1x_2 + x_2^2 - 3x_1 + e^{2x_1 + x_2}$$

5.) Trgovina z malimi živalmi je ugotovila, da potrebuje hrček najmanj 70 enot beljakovin, 100 enot ogljikovih hidratov ter 20 enot maščob dnevno. Trgovina ima na zalogi 6 različnih vrst hrane za hrčke z naslednjimi lastnostmi:

Vrsta hrane	Enot beljakovin na dozo	Enot ogljikovih hidratov na dozo	Enot maščob na dozo	Cena na dozo
A	20	50	4	2
B	30	30	9	3
C	40	20	11	5
D	40	25	10	6
E	45	50	9	8
F	30	20	10	8

Kakšno razmerje posameznih vrst hrane bo mešanica hrane za hrčka, ki bo zadovoljila njegove dnevne potrebe in bo cenovno najbolj ugodna za trgovino? Napiši sistem enačb in ga reši z MATLAB-om!

Operacijske raziskave

Izpit, 8. julij 2008

Pri vsaki nalogi poleg rezultatov še napiši, s katero funkcijo v MATLAB-u si prišel do rešitve in kakšni so bili vhodni parametri pri njenem klicu!

1.) Poišči vse lokalne minimume in maksimume funkcije na intervalu [-1..1,-1..1] ter njene vrednosti v teh točkah. Pomagaš si z risanjem funkcije. Ali obstaja globalni minimum?

$$f(\underline{x}) = x_1^2 + 2x_2^2 - 0.3\cos(3\pi x_1) - 0.4\cos(4\pi x_2) + 0.7\,.$$

2.) Minimiziraj funkcijo in izračunaj njeno vrednost v točki minimuma:

$$f(\underline{x}) = \frac{8x_1 + 4x_2 - x_1 x_2}{(x_1 x_2)^2}$$

3.) Določi minimum funkcije in njeno vrednost v točki minimuma:

$$f(\underline{x}) = x_1^2 + 2x_2^2 + x_3^2 + x_1 x_2 + x_1 x_3$$

ob naslednjih omejitvah:

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 25,$$
$$8x_1 + 14x_2 + 7x_3 = 56$$

ter vse spremenljivke morajo biti večje ali enake nič.

4.) Poišči maksimum funkcije in njeno vrednost v tej točki:

$$f(\underline{x}) = 3x_1 x_2 + 3x_2 x_3 - x_1^2 - 6x_2^2 - x_3^2\,.$$

5.) S pomočjo linearnega programiranja minimiziraj funkcijo in izračunaj njeno vrednost v točki minimuma:

$$f(\underline{x}) = x_1 + x_3 + x_4 - 2x_5$$

in omejitve:

$$x_1 - x_2 + x_3 - 2x_5 = 0$$
$$x_1 - x_2 + 2x_3 - 2x_5 = 0$$
$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 1$$

ter vse spremenljivke morajo biti večje ali enake nič.

Operacijske raziskave

Izpit, 3. september 2008

Pri vsaki nalogi poleg rezultatov še napiši, s katero funkcijo v MATLAB-u si prišel do rešitve in kakšni so bili vhodni parametri pri njenem klicu!

1.) Poišči vse lokalne minimume in maksimume funkcije na intervalu ter njene vrednosti v teh točkah. Pomagaš si lahko z risanjem funkcije. Ali obstaja globalni maksimum?

$$f(\underline{x}) = 3x_1x_2 + 40x_1 + 30x_2 - 4x_1^2 - x_1^4 - 3x_2^2 - x_2^4 .$$

2.) Maksimiziraj funkcijo in izračunaj njeno vrednost v točki maksimuma:

$$f(\underline{x}) = -(x_1 - x_2)^2 - (x_3 - 1)^2 - 1 - 0.02(x_1^5 + x_2^5 + x_3^5 - 16)^2$$

3.) Določi minimum funkcije in njeno vrednost v točki minimuma:

$$f(\underline{x}) = 2x_1 + x_2^3 + x_3^2$$

ob naslednjih omejitvah:

$$x_1^2 + 2x_2^2 + x_3^2 \geq 4,$$
$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0.$$

4.) Poišči minimum funkcije:

$$f(\underline{x}) = \sin(3x_1) + \cos(3x_2) + \sin(x_1 + x_2)$$

ob naslednjih omejitvah:

$$x_1^2 - 10x_2 \geq -1$$
$$10x_1 + x_2^2 \leq 100$$

ter vse spremenljivke morajo biti večje ali enake 0.

5.) S pomočjo linearnega programiranja maksimiziraj funkcijo in izračunaj njeno vrednost v točki maksimuma:

$$f(\underline{x}) = 2x_1 + x_2$$

ob omejitvah:

$$2x_1 + 5x_2 \leq 17$$
$$3x_1 + 2x_2 \leq 10$$

ter vse spremenljivke morajo biti nenegativne ter celoštevilčne.

Operacijske raziskave

Izpit, 19. september 2008

Pri vsaki nalogi poleg rezultatov še napiši, s katero funkcijo v MATLAB-u si prišel do rešitve in kakšni so bili vhodni parametri pri njenem klicu!

1.) Poišči minimum in maksimum funkcije ter njene vrednosti v teh točkah. Pomagaš si lahko z risanjem funkcije!

$$f(\underline{x}) = \cos^2 x_1 + \cos^2 x_2 \qquad \text{ob pogoju} \qquad x_2 - x_1 = \frac{\pi}{4}.$$

2.) Minimiziraj funkcijo in izračunaj njeno vrednost v točki minimuma:

$$f(\underline{x}) = x_1 + \frac{x_2^2}{4x_1} + \frac{x_3^2}{x_2} + \frac{2}{x_3}$$

ter vse spremenljivke morajo biti strogo večje od nič.

3.) Določi minimum(e) in maksimum(e) funkcije ter njene vrednosti v teh točkah:

$$f(\underline{x}) = x_1 x_2 x_3$$

ob naslednjih omejitvah:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 5, \\ x_1 x_2 + x_2 x_3 + x_3 x_1 &= 8. \end{aligned}$$

4.) S pomočjo Matlaba reši naslednji sistem enačb:

$$\begin{aligned} x_1 e^{x_2} - x_1^5 + x_2 &= 3 \\ x_1 + x_2 + \tan x_1 - \sin x_2 &= 0. \end{aligned}$$

5.) S pomočjo linearnega programiranja maksimiziraj funkcijo in izračunaj njeno vrednost v točki maksimuma:

$$f(\underline{x}) = x_1 + 9x_2 + x_3$$

ob omejitvah:

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 3x_3 &\le 9 \\ 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 &\le 15 \end{aligned}$$

ter vse spremenljivke morajo biti nenegativne ter celoštevilčne.

Operacijske raziskave
Izpit, 28. januar 2009

Pri vsaki nalogi poleg rezultatov še napiši, s katero funkcijo v MATLAB-u si prišel do rešitve in kakšni so bili vhodni parametri pri njenem klicu!

1.) Poišči vse minimume in maksimume funkcije ter njene vrednosti v teh točkah. Pomagaš si lahko z risanjem funkcije!

$$f(\underline{x}) = x_1^4 - 64x_1^2 - 10x_1 + x_2^4 - 32x_2^2 - 12x_2.$$

2.) Poišči minimum funkcije in izračunaj njeno vrednost v točki minimuma:

$$f(\underline{x}) = x_1^2 + x_2^2 + 2x_3^2 + x_4^2 - 5x_1 - 5x_2 - 21x_3 + 7x_4$$

ob upoštevanju naslednjih omejitev:

$$\begin{aligned}
&8 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 - x_4^2 - x_1 + x_2 - x_3 + x_4 \geq 0\\
&10 - x_1^2 - 2x_2^2 - x_3^2 - 2x_4^2 + x_1 + x_4 \geq 0\\
&5 - 2x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 - 2x_1 + x_2 + x_4 \geq 0.
\end{aligned}$$

3.) Poišči maksimum funkcije ter njeno vrednost v tej točki:

$$f(\underline{x}) = 32x_1 + 50x_2 - 10x_2^2 + x_2^3 - x_1^4 - x_2^4$$

ob naslednjih omejitvah:

$$\begin{aligned}
3x_1 + x_2 &\leq 11,\\
2x_1 + 5x_2 &\leq 16
\end{aligned}$$

ter obe spremenljivki morata biti večji ali enaki nič.

4.) S pomočjo linearnega programiranja maksimiziraj funkcijo in izračunaj njeno vrednost v točki maksimuma:

$$f(\underline{x}) = 5x_{11} + 4x_{12} + 2x_{13} + 4x_{21} + x_{22}$$

ob naslednjih omejitvah:

$$\begin{aligned}
3x_{11} + 3x_{12} + 3x_{13} + 2x_{21} + 2x_{22} &\leq 25\\
2x_{11} + 2x_{12} + 2x_{13} - x_{21} - x_{22} &\leq 10
\end{aligned}$$

ter $0 \leq x_{11} \leq 2,\ 0 \leq x_{12} \leq 3,\ 0 \leq x_{13},\ 0 \leq x_{21} \leq 3,\ 0 \leq x_{22} \leq 1.$

Operacijske raziskave

Izpit, 10. junij 2009

Pri vsaki nalogi poleg rezultatov še napiši, s katero funkcijo v MATLAB-u si prišel do rešitve in kakšni so bili vhodni parametri pri njenem klicu!

1.) Poišči vse minimume in maksimume funkcije na intervalu [0..9, 0..9] in izračunaj njene vrednosti v teh točkah:

$$f(\underline{x}) = \sin(x_1 + x_2) * \cos(x_1 - x_2) * \ln(1 + x_1 + x_2).$$

2.) Poišči maksimum funkcije in izračunaj njeno vrednost v tej točki:

$$f(\underline{x}) = \ln(1 + x_1) + 2 * \ln(1 + x_2)$$

ob upoštevanju omejitve:

$$x_1 + x_2 \leq 2$$

ter vse spremenljivke morajo biti večje ali enake nič.

3.) Poišči minimum funkcije ter njeno vrednost v tej točki:

$$f(\underline{x}) = 40 - x_1^2 - 2x_2^2 - x_3^2 - x_1 x_2 - x_1 x_3$$

ob naslednjih omejitvah:

$$8x_1 + 14x_2 + 7x_3 - 56 = 0,$$
$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 25.$$

ter vse spremenljivki morajo biti večje ali enake nič.

4.) Dobavitelj mora iz petih vrst mešanih sokov, ki jih ima na zalogi, pripraviti 500 litrov pijače, ki mora vsebovati najmanj 20 odstotkov oranžnega soka, 10 odstotkov soka grenivke in 5 odstotkov brusničnega soka. Če je zaloga takšna, kot jo kaže spodnja tabela, koliko litrov posameznega soka naj dobavitelj zmeša v novo pijačo, da bo dosegel predpisano sestavo pijače ob najmanjših stroških?

	Oranža (%)	**Grenivka (%)**	**Brusnica (%)**	**Zaloga (litrov)**	**Cena (EUR/liter)**
Sok A	40	40	0	200	1,50
Sok B	5	10	20	400	0,75
Sok C	100	0	0	100	2,00
Sok D	0	100	0	50	1,75
Sok E	0	0	0	800	0,25

Operacijske raziskave

Izpit, 24. junij 2009

Pri vsaki nalogi poleg rezultatov še napiši, s katero funkcijo v MATLAB-u si prišel do rešitve in kakšni so bili vhodni parametri pri njenem klicu!

1.) Poišči lego štirih po vrednosti najmanjših minimumov in štirih po vrednosti največjih maksimumov funkcije na intervalu [0..9, 0..9] in izračunaj njene vrednosti v teh točkah:

$$f(\underline{x}) = \sin(x_1 + x_2) * \cos(x_1 - x_2) * \left(x_1^2 + 3x_2^2 - 7x_1x_2 - 12x_2 + 5\right).$$

2.) Poišči maksimum in minimum funkcije (če oba obstajata) in izračunaj njeno vrednost v teh točkah:

$$f(\underline{x}) = \sin(10x_1 + x_2) + \cos(x_1 + 3x_2)$$

ob upoštevanju omejitve:

$$x_1^2 + x_2^3 \leq 16$$

ter vse spremenljivke morajo biti večje ali enake nič.

3.) Poišči minimum in maksimum funkcije (če oba obstajata) ter njeno vrednost v teh točkah:

$$f(\underline{x}) = x_1^2 - 2x_2^2 - 2x_3^2 - x_1x_2 + x_1x_3$$

ob naslednjih omejitvah:

$$3x_1 - 14x_2 + 7x_3 \leq 60,$$
$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 36.$$

ter vse spremenljivki morajo biti večje ali enake nič.

4.) Planinec planira turo, na katero bi rad vzel 5 predmetov. Ampak njihova skupna teža presega 30 kilogramov, kolikor ocenjuje, da bi lahko nosil. Da bi si pomagal pri izboru predmetov, ki jih bo vzel s seboj, je vsakemu od predmetov dal neko vrednost (koliko mu pomeni):

Predmet	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
Teža (kg)	26	11,5	17,5	7,5	3,5
Vrednost	100	60	70	15	15

Katere stvari naj planinec vzame s seboj, da bo maksimiziral skupno vrednost izbranih predmetov, a da ne bo presegel omejitve skupne teže?

Operacijske raziskave

Izpit, 2. september 2009

Pri vsaki nalogi poleg rezultatov še napiši, s katero funkcijo v MATLAB-u si prišel do rešitve in kakšni so bili vhodni parametri pri njenem klicu!

1.) Minimiziraj funkcijo ter poišči njeno vrednost v točki minimuma:

$$f(\underline{x}) = x_1^2 + 20x_1x_2 + 100x_2^2 + 5x_3^2 + 10x_3x_4 + 5x_4^2$$

ob naslednjih omejitvah:

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \geq 1$$

ter vse spremenljivke morajo biti večje ali enake nič.

2.) Poišči minimuma funkcij pod a) in b) in izračunaj funkcijski vrednosti v teh točkah:

a) $f(\underline{x}) = x_1 + 4x_1^2 + 2x_2 - x_1x_2 + 4x_2^2 + 3x_3 + 4x_3^2 + 4x_4 + 2x_1x_4 + 2x_2x_4 + 2x_3x_4 + x_4^2$.

b) $f(\underline{x}) = x_2x_3e^{x_1+x_3-x_4} + (x_2x_3)^2 + x_3 - x_4$.

3.) Poišči maksimum funkcije ter njeno vrednost v tej točki:

$$f(\underline{x}) = 5x_1 + e^{-2x_2} - e^{-x_2} + x_1x_3 + 4x_3 + 6x_4 + \frac{5x_5}{x_5+1} + \frac{6x_6}{x_6+1}$$

ob naslednjih omejitvah:

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 \leq 10,$$
$$x_1 + x_3 + x_4 \leq 5,$$
$$x_1 - x_2^2 + x_3 + x_5 + x_6^2 \leq 5,$$
$$x_2 + 2x_4 + x_5 + 0.8x_6 = 5,$$
$$x_3^2 + x_5^2 + x_6^2 = 5.$$

4.) Proizvajalec proizvaja zlitino, ki je sestavljena iz 50 odstotkov kositra, 30 odstotkov svinca in 20 odstotkov cinka. Zlitina se lahko proizvede z mešanjem različnih drugih zlitin, ki so na voljo, njihove lastnosti in cene so v spodnji tabeli. Cilj je najti najcenejšo zmes!

	Zlitine, ki so na voljo				
Lastnosti	A	B	C	D	E
Svinec (%)	10	10	40	60	30
Cink (%)	10	30	50	30	30
Kositer (%)	80	60	10	10	40
Cena (€/kg zlitine)	8.2	9.3	11.2	13	17

Operacijske raziskave

Izpit, 16. september 2009

Pri vsaki nalogi poleg rezultatov še napiši, s katero funkcijo v MATLAB-u si prišel do rešitve in kakšni so bili vhodni parametri pri njenem klicu!

1.) Minimiziraj funkcijo ter poišči njeno vrednost v točki minimuma:

$$f(\underline{x}) = \frac{1}{1 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$$

ob naslednjih omejitvah:

$$2 - 3x_1^2 - 4x_2^2 - 5x_3^2 = 0$$
$$6x_1 + 7x_2 + 8x_3 = 0.$$

2.) Reši naslednji sistem nelinearnih enačb:

$$-x_1^2 + x_2^2 + x_1x_2x_3 = 1.34$$
$$x_1x_2 - x_3^2 = 0.09$$
$$e^{x_1} - e^{x_2} + x_3 = 0.41$$

3.) Poišči maksimum funkcije ter njeno vrednost v tej točki:

$$f(\underline{x}) = (x_1 - 2)^2 + (x_2 - 10)^2$$

ob naslednjih omejitvah:

$$x_1^2 + x_2^2 = 50,$$
$$x_1^2 + x_2^2 + 2x_1x_2 - x_1 - x_2 + 20 \geq 0$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$

4.) Poišči minimum funkcije ter njeno vrednost v tej točki:

$$f(\underline{x}) = e^{x_1x_2x_3x_4x_5} - \frac{1}{2}\left(x_1^3 + x_2^3 + 1\right)^2$$

ob naslednjih omejitvah:

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + x_5^2 - 10 = 0,$$
$$x_2x_3 - 5x_4x_5 = 0,$$
$$x_1^3 + x_2^3 + 1 = 0.$$

5.) Poišči minimum funkcije za naslednjo funkcijo šestih spremenljivk ter njeno vrednost v tej točki:

$$f(\underline{x}) = \sum_{i=1}^{5}\left(x_i^2 - 2x_{i+1}^2 + x_i x_{i+1} - 1\right)^3$$

ter vse spremenljivke so večje ali enake nič.

Operacijske raziskave

Izpit, 27. januar 2010

Pri vsaki nalogi poleg rezultatov še napiši, s katero funkcijo v MATLAB-u si prišel do rešitve in kakšni so bili vhodni parametri pri njenem klicu!

1.) Poišči štiri po vrednosti najmanjše minimume in štiri po vrednosti največje maksimume funkcije na intervalu [0..9, 0..9] in izračunaj njene vrednosti v teh točkah:

$$f(\underline{x}) = \sin(x_1 - x_2) * \cos(x_1 + x_2) * \left(x_1^2 + 2x_2^2 - 6x_1x_2 - 13x_2 + 7\right).$$

2.) Poišči minimum in maksimum (če oba obstajata) funkcije ter njeno vrednost v tej točki:

$$f(\underline{x}) = 24x_1^2 + 14x_2^2 + 46x_3^2 - 28x_1x_2 - 24x_1x_3 + 34x_2x_3$$

ob naslednjih omejitvah:

$$\begin{aligned} &11x_1 + 9x_2 + 12x_3 \geq 1000, \\ &x_2 + x_3 = 40 \\ &x_1, x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

3.) Poišči minimum funkcije ter njeno vrednost v tej točki:

$$f(\underline{x}) = e^{x_1x_2x_3x_4x_5} - 3\left(x_1^3 + x_2^3 + 1\right)^3 + 1$$

ob naslednjih omejitvah:

$$\begin{aligned} &x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + x_5^2 - 10 = 0, \\ &x_2x_3 - 5x_4x_5 \geq 0, \\ &x_1^3 + x_2^3 + 1 \leq 0. \end{aligned}$$

4.) Poišči maksimum funkcije in njeno vrednost v tej točki:

$$f(\underline{x}) = x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4$$

ob naslednjih omejitvah:

$$\begin{aligned} &3x_1 + 2x_2 + x_3 + 4x_4 \leq 10 \\ &5x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 5x_4 \leq 5 \end{aligned}$$

ter vse spremenljivke morajo biti pozitivne in celoštevilčne.

Operacijske raziskave

Izpit, 3. februar 2010

Pri vsaki nalogi poleg rezultatov še napiši, s katero funkcijo v MATLAB-u si prišel do rešitve in kakšni so bili vhodni parametri pri njenem klicu!

1.) Poišči vse lokalne ekstreme funkcije na intervalu [-2.3, 2.3] in njene vrednosti v teh točkah:

$$f(x) = \frac{1}{2}(\sin(7x) - x)^2 .$$

2.) Poišči minimum funkcije ter njeno vrednost v tej točki:

$$f(\underline{x}) = 24.55x_1 + 26.75x_2 + 39x_3 + 40.5x_4$$

ob naslednjih omejitvah:

$$\begin{aligned}
&2.3x_1 + 5.6x_2 + 11.1x_3 + 1.3x_4 - 5 \geq 0 \\
&x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1 \\
&12x_1 + 11.9x_2 + 41.8x_3 + 52.1x_4 - 21 - 1.645\sqrt{0.28x_1^2 + 0.19x_2^2 + 20.5x_3^2 + 0.62x_4^2} \geq 0 \\
&x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0
\end{aligned}$$

3.) Poišči pet minimumov funkcije in njeno vrednost v teh točkah:

$$f(\underline{x}) = \left(1 - 2x_2 + \frac{1}{20}\sin 4\pi x_2 - x_1\right)^2 + \left(x_2 - \frac{1}{2}\sin 2\pi x_1\right)^2$$

ob naslednjih omejitvah:

$$\begin{aligned}
-10 \leq x_1 \leq 10 \\
-10 \leq x_2 \leq 10
\end{aligned}$$

4.) Poišči minimum naslednje funkcije in njeno vrednost v tej točki:

$$f(\underline{x}) = 3x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 + 3x_5$$

ob omejitvah:

$$\begin{aligned}
&2x_1 + 5x_2 + x_4 + x_5 \geq 6 \\
&4x_2 - 2x_3 + 2x_4 + 3x_5 \geq 5 \\
&x_1 - 6x_2 + 3x_3 + 7x_4 + 5x_5 \leq 7 \\
&x_i \geq 0
\end{aligned}$$

Operacijske raziskave

Izpit, 16. junij 2010

Pri vsaki nalogi poleg rezultatov še napiši, s katero funkcijo v MATLAB-u si prišel do rešitve in kakšni so bili vhodni parametri pri njenem klicu!

1.) Poišči štiri po vrednosti najmanjše minimume in štiri po vrednosti največje maksimume funkcije na intervalu [0..9,0..9] ter izračunaj vrednost funkcije v teh točkah:

$$f(\underline{x}) = \sin(x_1 - x_2) * \cos(x_1 + 2x_2) * (3x_1^2 - 2x_2^2 + 3x_1x_2 - 11x_1 + 4).$$

2.) Poišči minimum in maksimum funkcije (če oba obstajata) in izračunaj funkcijsko vrednost v teh točkah:

$$f(\underline{x}) = \frac{1}{1 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$$

ob naslednjih omejitvah:

$$x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0$$
$$4x_1^2 + 5x_2^2 + 6x_3^2 \le 7.$$

3.) Poišči vsaj 2 različna minimuma funkcije na intervalu [-10..10, -10..10] (pomoč: vrednost funkcije v teh točkah mora biti enaka -176.5418):

$$f(\underline{x}) = \sum_{i=1}^{5} i * \cos((i-1)x_1 + i) * \sum_{j=1}^{5} j * \cos((j+1)x_2 + j)$$

4.) Najdi rešitev naslednjega sistema enačb:

$$2x_1^2 - 3x_2^2 = e^{x_3}$$
$$\cos(x_1 + x_2) + x_3 = 2$$
$$2x_1 + 3x_2 = 2x_3$$

5.) Poišči minimum in maksimum (če oba obstajata) naslednjega linearnega problema ter vrednost funkcije v najdeni točki:

$$f(\underline{x}) = 2x_1 + 3x_2 + 4x_3$$

ob naslednjih omejitvah

$$x_1 + x_2 + x_3 \le 1$$
$$x_1 + x_2 + 2x_3 = 2$$
$$3x_1 + 2x_2 + x_3 \ge 4$$

ter vse spremenljivke so večje ali enake nič. Poskusi enako nalogo rešiti še za primer, ko morajo biti spremenljivke celoštevilčne.

Operacijske raziskave

Izpit, 1. september 2010

Pri vsaki nalogi poleg rezultatov še napiši, s katero funkcijo v MATLAB-u si prišel do rešitve in kakšni so bili vhodni parametri pri njenem klicu!

1.) Poišči tri po vrednosti najmanjše minimume in tri po vrednosti največje maksimume funkcije na intervalu [0..9,0..9] ter izračunaj vrednosti funkcije v teh točkah:

$$f(\underline{x}) = \sin(x_1 - 2x_2) * \cos(x_1 + 3x_2) * (2x_1^2 - 3x_2^2 + 4x_1x_2 - 9x_1 + 1).$$

2.) Poišči minimum funkcije

$$f(\underline{x}) = 100(x_2 - x_1^2)^2 + (1 - x_1)^2 + 90(x_4 - x_3^2)^2 + (1 - x_3)^2 + \\ + 10.1\left((x_2 - 1)^2 + (x_4 - 1)^2\right) + 19.8(x_2 - 1)(x_4 - 1)$$

in ob omejitvah

$$-10 \leq x_i \leq 10, \; i = 1,...,4 .$$

3.) Izdelati želimo sod v obliki valja iz pločevine (zgoraj odprt), ki bo držal 800 litrov vode. Izračunaj njegove dimenzije (polmer in višino) tako, da bo za njegovo izdelavo potrebna minimalna količina pločevine.

4.) Poišči minimum in maksimum (če oba obstajata) naslednjega linearnega problema ter vrednost funkcije v najdeni točki:

$$f(\underline{x}) = 10x_1 + 2x_2 - x_3$$

ob naslednjih omejitvah

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &\leq 50 \\ x_1 + x_2 &\geq 10 \\ x_2 + x_3 &\leq 30 \\ x_2 + x_3 &\geq 7 \\ x_1 + x_2 + x_3 &= 60 \end{aligned}$$

ter vse spremenljivke so večje ali enake nič.

Operacijske raziskave

Izpit, 28. januar 2011

Pri vsaki nalogi poleg rezultatov še napiši, s katero funkcijo v MATLAB-u si prišel do rešitve in kakšni so bili vhodni parametri pri njenem klicu!

1.) Poišči vse lokalne minimume in maksimume funkcije na intervalu [0..5,0..5] ter izračunaj vrednosti funkcije v teh točkah:

$$f(\underline{x}) = \sin(x_1 + x_2) * \cos(x_1 - 2x_2) * \ln(1 + 2x_1 + x_2).$$

2.) Poišči minimum funkcije s šestimi spremenljivkami in njeno vrednost v tej točki:

$$\begin{aligned} f(\underline{x}) = {} & 0.0204x_1x_4(x_1 + x_2 + x_3) + 0.0187x_2x_3(x_1 + 1.57x_2 + x_4) \\ & + 0.0607x_1x_4x_5^2(x_1 + x_2 + x_3) + 0.0437x_2x_3x_6^2(x_1 + 1.57x_2 + x_4) \end{aligned}$$

in ob omejitvah

$$\begin{aligned} & 0.001x_1x_2x_3x_4x_5x_6 - 2.07 \ge 0 \\ & 1 - 0.00062x_1x_4x_5^2(x_1 + x_2 + x_3) - 0.00058x_2x_3x_6^2(x_1 + 1.57x_2 + x_4) \ge 0 \\ & 0 \le x_i,\ i = 1,\dots,6 \end{aligned}$$

Pomoč: za startno točko vzemi točko x_0=[5 4 10 11 1 1].

3.) Okno ima obliko zlepljenih pravokotnika in polkroga na zgornjem delu. Za zunanji okvir okna imamo na voljo 20 metrov materiala. Izračunaj mere okna (višino in širino pravokotnega dela), da bo skozi okno prihajalo maksimalno veliko svetlobe in bomo porabili ravno ves material za obrobo.

4.) Poišči minimum in maksimum (če oba obstajata) naslednjega linearnega programa ter vrednost funkcije v najdenih točkah ekstrema:

$$f(\underline{x}) = x_1 + 3x_3 - 2x_5$$

ob naslednjih omejitvah

$$\begin{aligned} & x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 2x_5 = 0 \\ & 2x_1 + x_2 - x_4 - 2x_5 = 0 \\ & x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 1 \end{aligned}$$

ter vse spremenljivke morajo biti večje ali enake nič.

Operacijske raziskave

Izpit, 20. junij 2011

Pri vsaki nalogi poleg rezultatov še napiši, s katero funkcijo v MATLAB-u si prišel do rešitve in kakšni so bili vhodni parametri pri njenem klicu!

1.) Poišči vse lokalne minimume in maksimume funkcije na intervalu [0..5,0..5] ter izračunaj vrednosti funkcije v teh točkah:

$$f(\underline{x}) = \sin(x_1 - 3x_2) * \cos(-x_1 - 2x_2) * \ln(2 + 3x_1 + x_2).$$

2.) Poišči minimum funkcije z desetimi spremenljivkami in njeno vrednost v tej točki:

$$f(\underline{x}) = \sum_{i=1}^{10} \left[(\ln(x_i - 2))^2 + (\ln(10 - x_i))^2 \right] - \left(\prod_{i=1}^{10} x_i \right)^{0.2}$$

in ob omejitvah

$$2.001 \le x_i \le 9.999, \; i = 1,...,10$$

3.) En meter dolgo žico prerežemo na dva dela. Prvi dobljen kos žice zvijemo v obliko kvadrata, drugi dobljeni kos žice pa v enakostranični trikotnik. Na katerem mestu naj prerežemo žico, da bo skupna ploščina obeh likov:

a) minimalna
b) maksimalna?

4.) Poišči minimum in maksimum (če oba obstajata) naslednjega linearnega problema ter vrednost funkcije v najdeni točki:

$$f(\underline{x}) = x_1 + 3x_2 - 2x_3 + x_4$$

ob naslednjih omejitvah

$$3x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 \le 20$$
$$2x_1 + x_2 + x_4 = 10$$
$$5x_1 - 2x_2 - x_3 + 2x_4 \ge 3$$

ter vse spremenljivke so večje ali enake nič.

Operacijske raziskave
Izpit, 8. september 2011

Pri vsaki nalogi poleg rezultatov še napiši, s katero funkcijo v MATLAB-u si prišel do rešitve in kakšni so bili vhodni parametri pri njenem klicu!

1.) Poišči tri po vrednosti najmanjše lokalne minimume in tri po vrednosti najvišje lokalne maksimume funkcije na intervalu [0..9,0..9] ter izračunaj vrednosti funkcije v teh točkah:

$$f(\underline{x}) = \sin(2x_1 + x_2) * \cos(x_1 - 2x_2) * \ln(1 + 3x_1 + x_2).$$

2.) Poišči po tri lokalne minimume funkcij in njene vrednosti v teh točkah za n=2,3,4:

$$f(\underline{x}) = (x_1 - 1)^2 + (x_n - 1)^2 + n\sum_{i=1}^{n-1}(n-i)(x_i^2 - x_{i+1})^2$$

in ob naslednjih omejitvah:

$$-5 \leq x_i \leq 5, \quad i = 1,2,...,n$$

3.) V posodo za vino v obliki valja bi radi spravili 20000 litrov vina. Material za izdelavo te posode stane 10 EUR/m^2 za dno in strop ter 8 EUR/m^2 za obod posode. Poišči polmer osnovne ploskve ter višino posode, da bo material za njeno izdelavo najcenejši.

4.) Poišči minimum in maksimum (če oba obstajata) naslednjega linearnega programa ter vrednost funkcije v najdenih točkah ekstrema:

$$f(\underline{x}) = 5x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 5x_4$$

ob naslednjih omejitvah

$$x_1 - x_2 + 7x_3 + 3x_4 \geq 4$$
$$x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4 = 9$$
$$2x_1 + 3x_2 + x_3 - 4x_4 \leq 5$$

ter vse spremenljivke morajo biti večje ali enake nič. Isto nalogo reši še za primer, ko morajo biti vse spremenljivke celoštevilčne.

Optimizacijske metode

Kolokvij, 19. januar 2012

Pri vsaki nalogi poleg rezultatov še napiši, s katero funkcijo v MATLAB-u si prišel do rešitve in kakšni so bili vhodni parametri pri njenem klicu!

1.) Poišči tri po vrednosti najmanjše lokalne minimume in tri po vrednosti najvišje lokalne maksimume funkcije na intervalu [0..5,0..5] ter izračunaj vrednosti funkcije v teh točkah:

$$f(\underline{x}) = \sin(2x_1 + x_2) * \cos(x_1 + 2x_2) * \ln(30 + 3x_1 + 4x_2).$$

2.) Poišči minimum funkcije in njeno vrednost v točki minimuma:

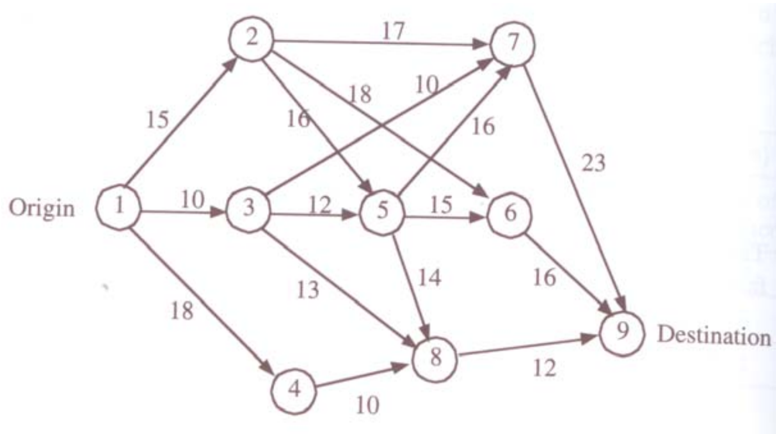
$$f(\underline{x}) = 12x_1^2 + 2.8x_2^2 + 55.2x_3^2 - 11.2x_1x_2 + 46x_1x_3 - 24x_2x_3$$

in ob naslednjih omejitvah (vse spremenljivke morajo biti nenegativne):

$$x_1 + x_2 + x_3 = 10000$$
$$9x_1 + 7x_2 + 10x_3 \geq 80000$$

3.) Po hodniku v obliki črke L bi radi nesli cev. Hodnik ima do vogala širino 3 metre, od vogala (pod pravim kotom) dalje pa le 2.4 metra. Koliko je najdaljša dolžina cevi, ki jo lahko nesemo okrog vogala hodnika, če mora biti cev ves čas v vodoravnem položaju?

4.) S pomočjo linearnega programiranja poišči najcenejšo pot med startom (vozlišče 1) in ciljem (vozlišče 9). Rešitev vsebuje zaporedje vozlišč, skozi katera potujemo in skupno ceno poti (vsaka povezava med vozlišči podaja svojo ceno). Oddaj še izgled matrik A, b, Aeq, in beq pri reševanju tega linearnega problema!



5.) Poišči vse štiri rešitve naslednjega sistema nelinearnih enačb:

$$x^2 - xy + y^2 = 21$$
$$x^2 + 2xy - 8y^2 = 0$$

Operacijske raziskave

Izpit, 27. januar 2012

Pri vsaki nalogi poleg rezultatov še napiši, s katero funkcijo v MATLAB-u si prišel do rešitve in kakšni so bili vhodni parametri pri njenem klicu!

1.) Poišči lego treh po vrednosti najmanjših minimumov in treh po vrednosti največjih maksimumov funkcije na intervalu [0..9, 0..9] in izračunaj njene vrednosti v teh točkah:

$$f(\underline{x}) = \sin(2x_1 + x_2) * \cos(x_1 - 2x_2) * \left(2x_1^2 - 3x_2^2 + 11x_1x_2 - 14x_1 + 3\right).$$

2.) Reši naslednji sistem nelinearnih enačb (najdi po možnosti več različnih rešitev, če obstajajo):

$$\begin{aligned}
&x_1(3 - 0.5x_1) - 2x_2 + 1 = 0 \\
&x_2(3 - 0.5x_2) - x_1 - 2x_3 + 1 = 0 \\
&x_3(3 - 0.5x_3) - x_2 + 1 = 0
\end{aligned}$$

3.) Poišči maksimum in minimum funkcije (če oba obstajata) ter njeni vrednosti v teh točkah:

$$f(\underline{x}) = (x_1 - 3)^2 + (x_2 - 4)^2$$

ob naslednjih omejitvah:

$$\begin{aligned}
&x_1^2 + 2x_2^2 = 80, \\
&x_1^2 + x_2^2 + 2x_1x_2 - 2x_1 - 7x_2 + 4 \geq 0 \\
&x_1, x_2 \geq 0
\end{aligned}$$

4.) Poišči največjo možno ploščino pravokotnika, ki je lahko včrtan krogu s polmerom 5 cm. Določiti moraš torej dolžini stranic x in y ter ploščino pravokotnika. Oddaj tudi enačbo, katere maksimum si iskal pri določanju rešitve!

5.) Poišči minimum naslednjega linearnega problema:

$$f(\underline{x}) = -3x_1 + 8x_2 - 2x_3 + 4x_4$$

ob naslednjih omejitvah:

$$\begin{aligned}
&x_1 - 2x_2 + 4x_3 + 6x_4 \leq 0, \\
&x_1 - 4x_2 - x_3 + 6x_4 \leq 2, \\
&x_2 \leq 3, \\
&x_4 \geq 3
\end{aligned}$$

ter vse spremenljivke morajo biti nenegativne.

Optimizacijske metode

Izpit, 14. junij 2012

Pri vsaki nalogi poleg rezultatov še napiši, s katero funkcijo v MATLAB-u si prišel do rešitve in kakšni so bili vhodni parametri pri njenem klicu!

1.) Poišči tri po vrednosti najmanjše lokalne minimume in tri po vrednosti najvišje lokalne maksimume funkcije na intervalu [0..5,0..5] ter izračunaj vrednosti funkcije v teh točkah:

$$f(\underline{x}) = \sin(3x_1 + x_2) * \cos(x_1 - 2x_2) * \ln(10 + 2x_1 + 3x_2).$$

2.) Poišči minimum funkcije in njeno vrednost v točki minimuma:

$$f(\underline{x}) = e^{-x_1 - x_2} + x_1 x_2 + x_2^2$$

in ob naslednjih omejitvah

$$\frac{1}{4}e^{-x_1} + \frac{1}{4}x_2^2 \leq 1$$
$$\frac{1}{5}x_1 + \frac{1}{2}x_2 \leq 1$$

3.) Poišči največjo možno ploščino pravokotnika, ki je lahko včrtan krogu s polmerom 5 cm. Določiti moraš torej dolžini stranic x in y ter ploščino pravokotnika. Oddaj tudi enačbo, katere maksimum si iskal pri določanju rešitve!

4.) Podjetje posluje v štirih različnih stavbah A, B, C in D. Za zaposlene pa ima skupno tri parkirišča 1, 2 in 3. Skupno je parkirišč dovolj za vse, niso pa vsa parkirišča enako oddaljena od posamezne stavbe, kjer zaposleni dela. V tabeli imamo podatke o razdaljah med parkirišči in posameznimi stavbami, skupno število parkirnih mest na posameznem parkirišču ter število zaposlenih v posamezni stavbi. Poišči takšen razpored parkiranja zaposlenih, da bodo vsi skupaj prepešačili čimmanj metrov od parkirišča do stavbe, kjer delajo.

	Razdalje do parkirišča v metrih				Število
Parkirišče	Zgradba A	Zgradba B	Zgradba C	Zgradba D	parkirnih mest
1	290	410	260	410	80
2	430	350	330	370	100
3	310	260	290	380	40
Štev. delavcev	40	40	60	60	

5.) Mesto ima na voljo 250000 EUR za vzpostavitev novih površin za odlaganje odpadkov. Sedem lokacij je možnih za uporabo, preglednica pa podaja njihove kapacitete v tonah na teden ter cene za njihovo vzpostavitev. Katere od teh lokacij naj mesto vzpostavi?

Lokacija	A	B	C	D	E	F	G
Ton na teden	20	17	15	15	10	8	5
Cena (v tisočih EUR)	145	92	70	70	84	14	47